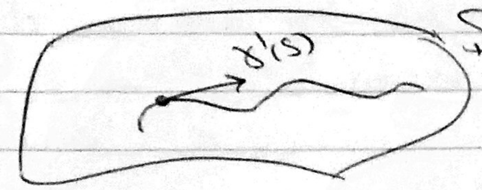
Ολική Διαφορική Γεωμετρία 27/03/2018

Gauss - Bonnet

Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^3$ επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, $X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ παραμέτρηση και $\gamma: (-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ η παραμέτρηση μιας καμπύλης στην S



Θεωρούμε ως παράμετρο το μήκος τόξου.

Ορίζουμε ως $\frac{D\gamma'}{ds}(s) = \left\{ \frac{d\gamma'}{ds} \right\}^T$ = ορθή προβολή του $\frac{d\gamma'}{ds}$ στο $T_{\gamma(s)}S$

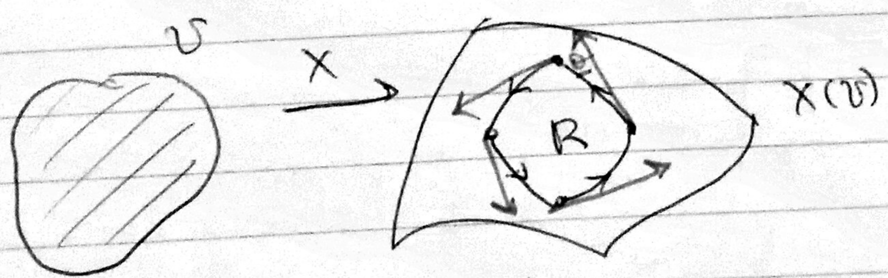
Συμπεράναμε ότι $\frac{D\gamma'}{ds}(s) = k_g(s) \cdot N(\gamma(s)) \times \gamma'(s)$

Εδώ $k_g(s)$ είναι η γεωδαισιακή καμπυλότητα της καμπύλης γ.
Όταν $k_g \equiv 0$ τότε η καμπύλη γ ονομάζεται γεωδαισιακή

Τοπικό Θεώρημα Gauss-Bonnet:

Έστω ότι $X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ είναι μια ορθογώνια παραμέτρηση $(F=0)$ μιας προσανατολισμένης επιφάνειας, όπου U ομοιομορφική με έναν ανοικτό δίσκο

Όταν είναι ισομετρικό με δίσκο είναι απλά συνεκτικό, δηλαδή δεν έχει τρύπες.



Έστω ότι $R \subset X(U)$ είναι απλή περιοχή και $\gamma: I \to S$ κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη ώστε $\partial R = \gamma(I)$. Συμβολίζουμε με $\gamma(s_0), \gamma(s_1), \dots, \gamma(s_\ell)$ τις κορυφές και με $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_\ell$ τις αντίστοιχες εξωτερικές γωνίες. Τότε: →

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\ell} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\,ds + \iint_R K\,d\sigma + \sum_{i=0}^{\ell} \theta_i = 2\pi}$$

<u>Πόρισμα:</u> Έστω T ένα γεωδαισιακό τρίγωνο που βρίσκεται στην εικόνα μιας παραμέτρησης με γωνίες $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.
Τότε:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} \varphi_i - \pi = \iint_T K\,d\sigma.}$$

! <u>Παρατήρηση:</u>

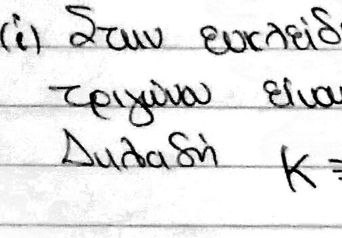
(i) Στην ευκλείδεια γεωμετρία το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°.
Δηλαδή $K \equiv 0$, $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i = \pi$.

(ii) Στην υπερβολική γεωμετρία δεν ξεπερνά τις 180°:
$K \equiv -1$, $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i < \pi$

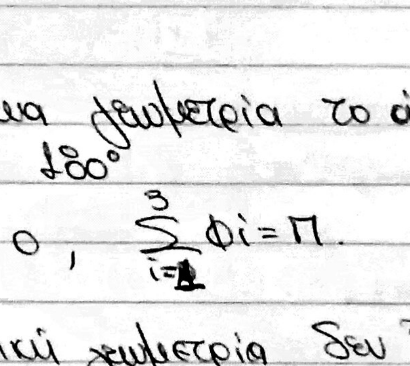
(iii) Στην σφαιρική γεωμετρία είναι περισσότερο από 180°:
$K \equiv 1$, $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i > \pi$

Σχηματικά:

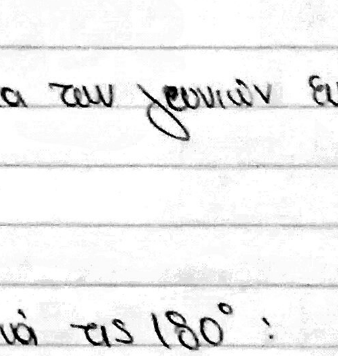
(i)



(ii)



(iii)



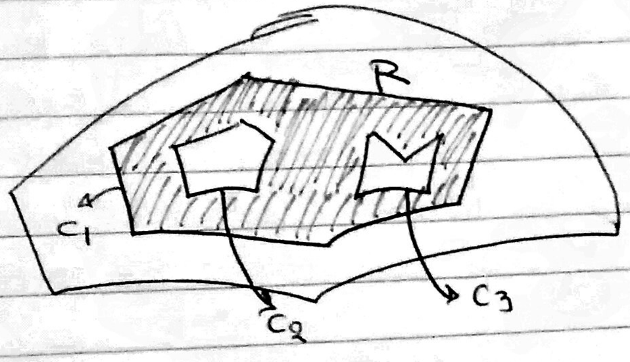
(*) Το εμβαδόν του τριγώνου στην σφαίρα μπορεί να το βρει γνωρίζοντας μόνο τις γωνίες όπως και στην υπερβολική, όχι όμως στο επίπεδο

Για να έχουμε ολική εκδοχή του Gauß-Bonnet, χρειαζόμαστε στοιχεία από την τοπολογία

Ορισμός:

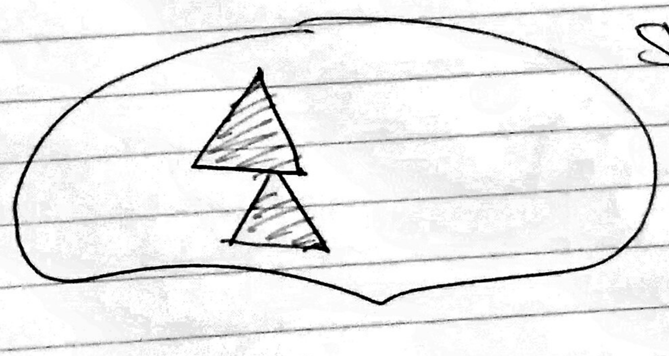
▶ Θεωρούμε S κανονική επιφάνεια
Μια περιοχή R ονομάζεται **κανονική** περιοχή εάν είναι συμπαγής και το ∂R (σύνορο) είναι πεπερασμένη ένωση από απλές κλειστές και κατά τμήματα κανονικές καμπύλες οι οποίες δεν τέμνονται

(Πχ)



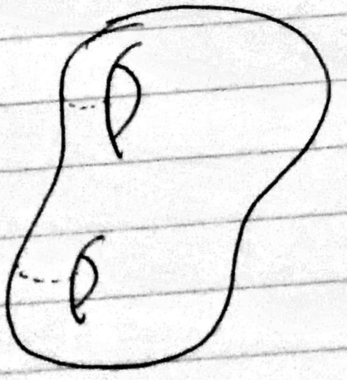
Εδώ είναι κανονική περιοχή
Τα C_1, C_2, C_3 δεν τέμνονται.

ενώ



Δεν είναι κανονική περιοχή

⊛ Μια κανονική συμπαγής επιφάνεια μπορεί να θεωρηθεί ως κανονική περιοχή με σύνορο το $\emptyset$

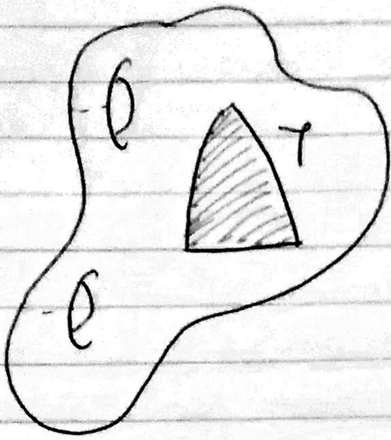


Ορισμός:

▶ Στην περίπτωση που μια απλή περιοχή έχει τρεις κορυφές με μη-μηδενικές εξωτερικές γωνίες θα το ονομάσουμε τριγωνική περιοχή

→

(πχ)



τριγωνική περιοχή

Ορισμός:

▲ Μια τριγωνοποίηση μιας κανονικής περιοχής R είναι μια πεπερασμένη οικογένεια τριγώνων.

$\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ έτσι ώστε:

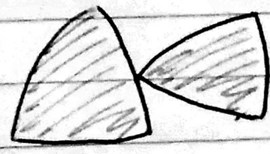
είναι ένα είδος κάλυψης της επιφάνειας

(α) $\bigcup_{i=1}^{n} T_i = R$.

(β) Αν $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ τότε το $T_i \cap T_j$ είναι είτε κοινή πλευρά ή κοινή κορυφή.

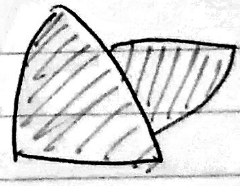
✱ Δεν επιτρέπεται τα εξής:

(i)



(ii)

(iii)



Ορισμός:

▲ Δοθείσης μιας τριγωνοποίησης $\mathcal{T}$ μιας κανονικής περιοχής R συμβολίζουμε με:

$F(\mathcal{T})$:= αριθμός των τριγώνων

$E(\mathcal{T})$:= αριθμός των ακμών

$V(\mathcal{T})$:= αριθμός των κορυφών

Ορισμός:

▶ Ο αριθμός $\chi(\tau) = F(\tau) - E(\tau) + V(\tau)$ ονομάζεται χαρακτηριστική Euler–Poincaré της τριγωνοποίησης τ.

(*) Αν έχω μια τριγωνοποίηση τ μπορώ να την κάνω μεγαλύτερη "σπάζοντας" κάποια πλευρά, δημιουργώντας μεγαλύτερα τρίγωνα ή προσθέτοντας πλευρές δημιουργώντας καινούργια τρίγωνα.

Δεν είναι σταθερά τα F, E, V γιατί μπορεί να αλλάξει η τριγωνοποίηση τ. Όμως ο αριθμός χ δεν αλλάζει.

Θεώρημα 1ο (χωρίς απόδειξη)

Κάθε κανονική περιοχή (ωσπερ και κάθε συμπαγής κανονική επιφάνεια) δέχεται τριγωνοποίηση.

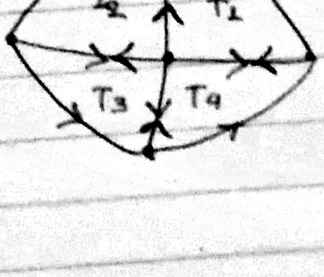
[Προφανώς, αν δέχεται μια τριγωνοποίηση, τότε δέχεται άπειρες.]

~~Παρατηρήσεις~~

Θεώρημα 2ο (χ.α.)

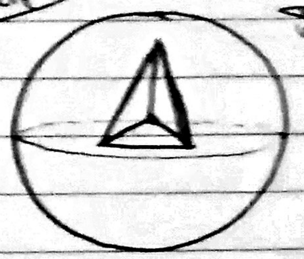
Έστω S κανονική προσανατολισμένη επιφάνεια και $\{x_a\}_{a\in I}$ οικογένεια παραμετρήσεων και R είναι κανονική περιοχή του S, τότε υπάρχει τριγωνοποίηση του R ώστε κάθε τρίγωνο να περιέχεται σε κάποια περιοχή συντεταγμένων.
Επιπλέον, το άκρο κάθε τριγώνου της τριγωνοποίησης τ είναι θετικά προσανατολισμένο και στις κοινές ακμές οι προσανατολισμοί είναι αντίθετοι.

Σχήμα:



Θεώρημα 3° (χ.α.)
Έστω R είναι κανονική περιοχή μιας επιφάνειας $S \subseteq \mathbb{R}^3$, τότε η χαρακτηριστική Euler-Poincaré δεν εξαρτάται από την τριγωνοποίηση.
Συνεπώς, από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε $\chi(R)$.
Ο αριθμός αυτός (χ) έχει μεγάλη τοπολογική σημασία.

(πχ) Σφαίρα

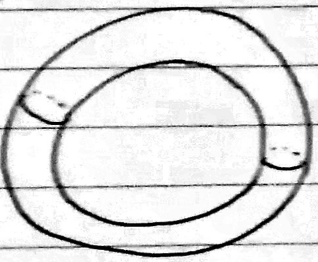


S^2

$F=4,\ E=6,\ V=4$

Άρα $\chi(S^2) = F - E + V = 2$.

Τόρος



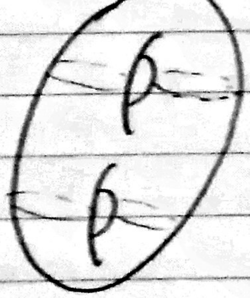
T_1^2.

(Τον κοιτάω από πάνω)

$\chi(T_1^2) = 0$.

(ο δείκτης 1 δείχνει ότι έχω 1 τρύπα)

Τόρος με 2 τρύπες

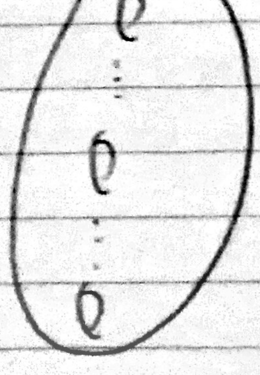


T_2^2.

$\chi(T_2^2) = -2$.

⋮

Τόρος με g τρύπες



T_g^2.

$\chi(T_g^2) = 2 - 2g$.

→

Ορισμός:

Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια, R μια κανονική περιοχή, τ μια τριγωνοποίηση ($\tau = \{T_1, \dots, T_n\}$) των κάθε τρίγωνο να περιέχεται σε κάποια περιοχή συντεταγμένων του προσανατολισμού. Έστω $f: S \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη απεικόνιση

Πρόταση: Ο αριθμός $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \iint_{x_i^{-1}(T_i)} f \circ x_i \sqrt{E_i G_i - F_i^2}\, du\, dv$

δεν εξαρτάται από τριγωνοποίηση τ ούτε από την οικογένεια $\{x_i\}$

→ Ο αριθμός αυτός λέγεται **ολοκλήρωμα** της f πάνω στην περιοχή R και συμβολίζεται με:

$$\boxed{\iint_R f\, d\sigma.}$$

Ολικό Θεώρημα Gauß-Bonnet: (θα αποδειχτεί παρακάτω)

Έστω $R \subset S$ κανονική περιοχή μιας προσανατολισμένης επιφάνειας S, με σύνορο ∂R το οποίο αποτελείται από εικόνες των απλών κλειστών, κατά τμήματα κανονικών καμπυλών $C_1, C_2, \dots, C_\ell$. Έστω ότι κάθε C_i είναι θετικά προσανατολισμένη και συμβολίζουμε με $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ τις εξωτερικές γωνίες.

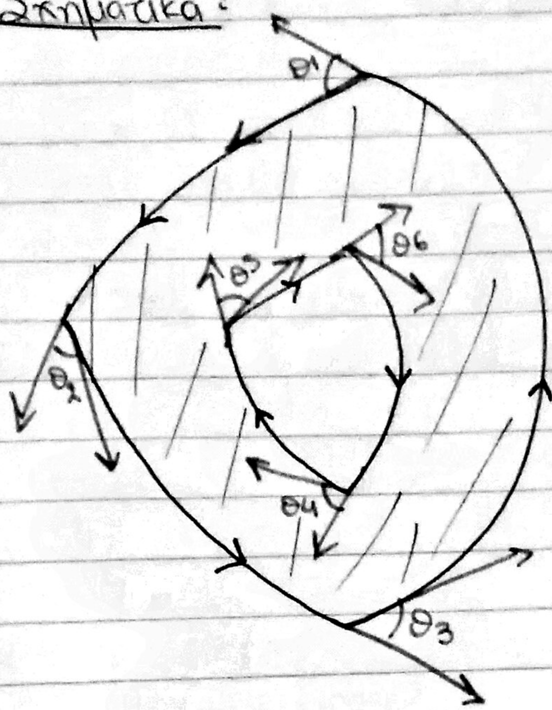
Τότε,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\ell} \int_{C_i} k_g(s)\, ds + \iint_R K\, d\sigma + \sum_{i=1}^{p} \theta_i = 2\pi \chi(R)}$$

όπου χρησιμοποιούμε ως παράμετρο των C_i (s) το μήκος τόξου.

→

Σχηματικά:



Δεν μπορώ να βρω συνάρτηση παντού θετική ή παντού αρνητική και το ολοκλήρωμά της να κάνει 0. Πρέπει κάπου να αλλάξει πρόσημο για να συμβεί αυτό.

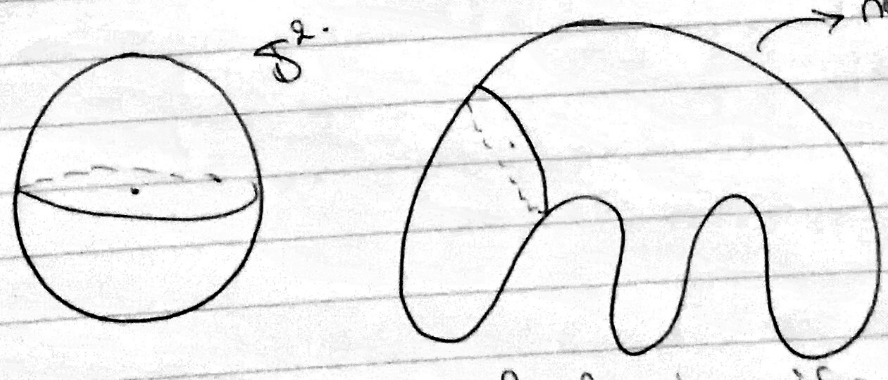
Πόρισμα: Εάν ως R θεωρήσουμε μια συμπαγή κανονική προσανατολισμένη επιφάνεια τότε:

$$\boxed{\iint_S K\,d\sigma = 2\pi \chi(S)}$$

γεωμετρική ποσότητα.

τοπολογική ποσότητα.

(Πχ) S^2.

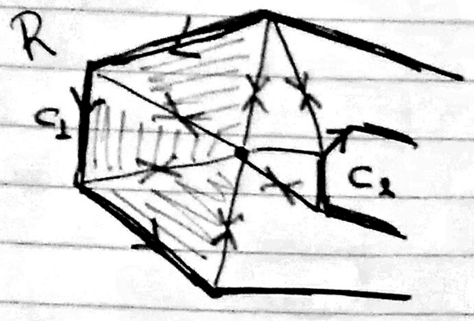


παραμόρφωση της σφαίρας.

Το ολοκλήρωμα αυτών των 2 θα είναι ίδιο

Απόδειξη του ολικού Θεωρήματος Gauß-Bonnet:

Θεωρούμε τριγωνοποίηση $\mathcal{T}=\{T_1,\dots,T_F\}$ έτσι ώστε κάθε T_i να περιέχεται σε περιοχή συντεταγμένων x_i, $i\in\{1,\dots,F\}$

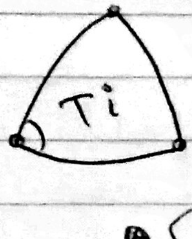


Σε κάθε τρίγωνο εφαρμόζουμε Gauß-Bonnet (τοπικό)

$$\Rightarrow \int_{\partial T_i} k_g(s)\,ds + \iint_{T_i} k\,d\sigma + (\text{άθροισμα εξωτερικών γωνιών } T_i) = 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{F}\int_{\partial T_i} k_g(s)\,ds + \sum_{i=1}^{F}\iint_{T_i} k\,d\sigma + \sum_{i=1}^{F}(\text{αθρ. εξ. γωνιών } T_i) = 2\pi F \quad (1)$$

Συμβολίζω το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του T_i με $\theta_{i1}+\theta_{i2}+\theta_{i3}$



Θεωρώ τις εξωτερικές γωνίες:

$$\begin{cases}\varphi_{i1}=\pi-\theta_{i1}\\ \varphi_{i2}=\pi-\theta_{i2}\\ \varphi_{i3}=\pi-\theta_{i3}\end{cases}$$

(Το i δείχνει σε ποιό τρίγωνο βρίσκομαι)

Επομένως, $\sum_{i=1}^{F}(\theta_{i1}+\theta_{i2}+\theta_{i3})=\sum_{i=1}^{F}(3\pi-\varphi_{i1}-\varphi_{i2}-\varphi_{i3})$

Εισάγουμε τους εξής συμβολισμούς: $\longrightarrow$

E_{ext} : άθροισμα εξωτερικών ακμών (ροζ)
E_{int} : άθροισμα εσωτερικών ακμών (μπλέ)

V_{ext} : άθροισμα εξωτερικών κορυφών
V_{int} : άθροισμα εσωτερικών κορυφών

Επειδή C_i είναι κλειστές καμπύλες $\Rightarrow$ $\boxed{E_{ext} = V_{ext}}$ $\circledast_1$

Επίσης με την επαγωγή μπορούμε να δείξουμε :

$\boxed{2E_{int} + E_{ext} = 3F}$ $\circledast_2$

Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^{F} (\theta_{i1}+\theta_{i2}+\theta_{i3}) = 3\pi F - \sum_{i=1}^{F} (\phi_{i1}+\phi_{i2}+\phi_{i3}) \overset{\circledast_2}{=}$$

$$= 2\pi E_{int} + \pi E_{ext} - \sum_{i=1}^{F} (\phi_{i1}+\phi_{i2}+\phi_{i3}) =$$

$$= 2\pi E_{int} + \pi E_{ext} - \sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{3} \phi_{ij}$$

Οι εξωτερικές κορυφές, μπορεί να είναι κορυφές κάποιου C_i ή κορυφές που προέκυψαν από την τριγωνοποίηση. Γι' αυτό γράφουμε ότι :

$\boxed{V_{ext} = V_{ec} + V_{et}}$ $\circledast_3$

V_{ec}: κορυφή C_i

V_{et}: κορυφή που προέκυψε από την τριγωνοποίηση.

Δηλαδή οι ροζ κορυφές υπήρχαν αλλά μπορεί να προέκυψαν και μπλέ από την τριγωνοπ.

Άρα : $$\sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{3} \theta_{ij} = 2\pi E_{int} + \pi E_{ext} - 2\pi V_{int} - \pi V_{et} + \sum_{i=1}^{P} (\pi - \theta_i) =$$

$$= 2\pi E_{int} + 2\pi E_{ext} - \pi E_{ext} - 2\pi V_{int} - \pi V_{et} - \sum_{i=1}^{P} (\pi - \theta_i) \overset{\circledast_1}{=}$$

$$\overset{(*)_1}{\equiv} 2\pi E_{int} + 2\pi E_{ext} - \pi V_{ext} - 2\pi V_{int} - \pi V_{et} - \pi V_{et} + \sum_{i=1}^{p} \theta_i \overset{(*)_3}{\equiv}$$

$$\overset{(*)_3}{\equiv} 2\pi E - 2\pi V_{int} - 2\pi V_{ext} + \sum_{i=1}^{p} \theta_i = 2\pi E - 2\pi V + \sum_{i=1}^{p} \theta_i$$

Àpa $$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g(s)\,ds + \iint_R K\,d\sigma + 2\pi E - 2\pi V + \sum_{i=1}^{p} \theta_i = 2\pi F$$